Journal of the Faculty of Management and Information Systems,
Prefectural University of Hiroshima
2011 No.3 pp. 53 － 68

論　文

経済成長における技術の履行水準に関する理論分析*

片　桐　昭　司

Theoretical Analysis of Technology Implementation on Economic Growth

Shoji KATAGIRI

1　はじめに

本研究の終局的な目的は，グローバル化が進む現在において，企業が採用する技術の履行水準が所得格差にどのように影響を与えるのかを考察するものである。この目的のため，本稿では，まず，採用される技術水準とそれに付随する生産性の成長率について理論的に分析し，技術の履行水準と経済成長との関係を明らかにする。

世界的な所得格差は，ICT（情報通信技術）の発展とともに拡大しつつあると言われる。これを裏付ける研究として，Pilat and Wölfl（2004），Pilat（2004）および片桐（2008）などがある。また，グローバル的な観点からの所得格差に関して，Anderson（2009）では，外部競争から隔離されている非貿易財の範囲が狭くなり各国間の所得格差が拡大することを指摘している。Acemoglu and Dell（2009）では，アメリカ大陸に属する諸国に関して，国家間およびそれらの国々の地方自治体と地域間／内の所得格差を平均対数偏差（Mean Log Deviation）とタイル指標を用いて分析している。その結果，国家間およびそれらの国々の地方自治体と地域間／内の所得格差の半分が，人的資本や残余因子で説明がつくことを例証している。さらに，技術的な差異（地方自治体の制度：その代理変数として舗装道路からの地方自治体の距離）が所得格差を生じさせていることも明らかにしている。また生産性の効率性が技術の採用の意志決定によって決定される内生的成長モデルをもちいて，生産性の効率性が所得格差に重要な役割をしていることも明らかにしている。Acemoglu and Zilibotti（2001）では，LDC で使用される多くの技術が OECD 諸国で開発され，それら技術は先進国の労働力を最適に使用するように設計されている。熟練の供給の差違はそれら技術が要求するものと LDC の熟練との間のミスマッチをつくりあげ，すべての国が最新の技術にアクセスできる場合でさえ，この技術のミスマッチは総要素生産性と一人当たりの生産物の大きな差違，つまり所得格差の要因になることを指摘している。Acemoglu and Zilibotti

*本稿は，平成 21 年 12 月 5 日に開催された九州経済学会第 59 回で報告した論文を基に加筆・修正したものである。

（2001）と同様に，Caselli（2005）においても，高所得の国と低所得の国との違いは，総要素生産性の違いから生じていることが指摘されている。これらの先行研究から，所得格差は総要素生産性に密接に関連していることが推察される。

それでは総要素生産性の違いはどこから生じてくるのであろうか。Comin and Hobijn（2007）では，中間財の生産において生産の効率性を，新技術の初期履行水準の採用というかたちで導入している。その結果，均衡経路上では，生産性の成長が高くなれば，企業が採用する技術の初期履行水準が低くなり，生産性の成長は所得を高めることをことを提示している。そこでは，履行プロフィールの限界履行が逓減することを仮定している。つまり，初期の履行水準の単位当たりの生産性は高いことを前提にしている。この履行水準は総要素生産性を高めるが，その源泉は特許に体化されたもので，研究開発部門で創出された特許（アイデア）を企業が取得することによって，効率的に新規の財の生産が可能となる。これまで，研究開発部門でアイデアがどのように生み出されるのかという過程に関しては，理論的に Alvarez 等（2008）や Lucas（2008）で言及されているが，Comin and Hobijn（2007）のように，財の生産における技術の履行水準というかたちで経済分析が行われている研究は数少ないと思われる。また，ICT が技術と密接につながる今日，企業がどの程度の技術の履行水準を選択するかによって，財の生産量（つまり所得）が決まり，マクロ的には一国の国内総生産の水準が決定されるはずであり，各国間でみれば，所得格差が生じるはずである。さらに，Acemoglu and Zilibotti（2001）で指摘されているように，熟練のミスマッチが最終的には所得格差を生み出すという示唆から，熟練のミスマッチ，つまり，技術を最適な履行水準で使いこなすための熟練のミスマッチの程度が先進国と発展途上国との間の所得格差を生み出すと考えられる。

以上を踏まえて，本稿では，グローバル的な所得格差の背景にあると考えられる技術の履行水準に焦点を当て，経済成長との関連を理論的に分析する。具体的には，Comin and Hobijn（2007）で提示されている限界履行が低減する履行水準プロフィール（曲線）の代わりに，新技術導入直後は緩慢に限界履行は増加するが，中盤では急速に，そして最終的には逓減する S 字型の履行水準曲線を導入し，生産性の成長や最適な履行水準を分析する。

以下では，第 2 章でモデルを設定し，さらに均衡条件を導出する。第 3 章では均衡および定常状態における生産性の成長率と最適な初期履行水準を分析し，それらから得られた結果を利用して比較静学および Comin and Hobijn（2007）との相違点を考察し，第 4 章で本稿をまとめることにする。

2　モデル

本モデルは Comin and Hobijn（2007）のモデルを基礎にしている。この経済の経済主体は家計と企業で，人口は 1 とし，企業は，最終財企業，中間財企業および R&D 企業からなり，海外との取引は考えないものとする。

2. 1　家計

代表的な家計は，各時点で，1 単位の時間が非弾力的に与えられている。また，家計は企業に r_t の実質利子率で貸し出す資本ストックを所有している。家計は，予算制約の下，以下の割引された効用フローを最大にするように消費 c_t の経路を選択する。

$$\frac{\sigma}{\sigma-1}\int_t^{\infty} e^{-\rho(s-t)} c_s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} ds. \tag{2.1}$$

結果として得られる最適消費経路（オイラー方程式）は次式で与えられる。

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(r_t - \rho). \tag{2.2}$$

2. 2　最終財部門

家計によって消費される最終財は，一連の中間財を使用して生産される。ここで y_t を時刻 t での最終財とし，y_{it} を時刻 t で生産に使用される i 番目の中間財とする。新規の中間財は各時点ですぐに導入される。したがって，時刻 t で生産に使用される中間財の範囲は $(-\infty, t]$ である。最終財の生産関数は次式で与えられる。

$$y_t = \left(\int_{-\infty}^{t} y_{it}^{\theta} di\right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.3}$$

ただし，$0<\theta<1$ である。最終財の市場は完全競争である。本稿では，最終財をニューメレールとし，その価格を 1 に基準化する。p_{it} を第 i 番目の中間財の 1 単位の価格とする。この価格を所与にすれば，時刻 t での中間財 i 需要は次式で与えられる。

$$y_{it} = \left(\frac{1}{p_{it}}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} y_t. \tag{2.4}$$

2. 3　中間財部門

各中間財は，財の生産に関して独占を保証する特許を所有する単一の企業によって生産される。中間財企業は 2 つのタイプの意志決定を行う。まず最初に，企業は，各時点で，要素需要と生産水準を決定し，供給する中間財の価格を決定する。

第 2 番目に，中間財企業が中間財の供給に対して独占権を得たとき，中間財の技術を履行するために，導入時点で，どのような生産性の水準にするのかを決定する。通時的に，生産者は中間財を効率的に生産するために学習し，実際の生産性と潜在的な生産性との間のギャップが最終的には消滅することになる。

投入要素と価格設定

中間財は，以下のコブ＝ダグラス型の技術を用いて，資本 k と労働 l を組み合わせて生産される。

$$y_{it} = a_{it} k_{it}^{\alpha} l_{it}^{1-\alpha}. \tag{2.5}$$

ただし，$0<\alpha<1$ である。第 i 番目の中間財が生産される生産性の水準，a_{it}，は時間とともに変化する。労働と資本は同質的で，各中間財の生産者は競争的な実質利子率 r_t と賃金 w_t でそれら生産要素を使用する。第 i 番目の中間財生産者の利潤フロー π_{it} は次式で与えられる。

$$\pi_{it} = p_{it} y_{it} - w_t l_{it} - (r_t + \delta) k_{it}. \tag{2.6}$$

ただし，δは資本減耗率である。

生産関数と需要関数を所与として，中間財生産者は，(2.6) の利潤フローを最大にするために，p_{it} と l_{it} と k_{it} の需要量を設定する。この結果，以下の式を満足する要素需要が得られる。

$$w_t = \theta(1-\alpha)p_{it}\frac{y_{it}}{l_{it}}, \tag{2.7}$$

$$r_t + \delta = \theta\alpha p_{it}\frac{y_{it}}{k_{it}}. \tag{2.8}$$

そして，最適な価格付けは一定のマークアップ率，$1/\theta > 1$，に限界生産費用，mc_{it}，を掛けたものに等しくなる：

$$p_{it} = \frac{1}{\theta}mc_{it}. \tag{2.9}$$

各期の利潤フローの水準は次式で与えられる。

$$\pi_{it} = (1-\theta)p_{it}y_{it}. \tag{2.10}$$

また，企業価値は，

$$V_{it} = (1-\theta)\int_t^{\infty} e^{\int_t^s r_j dj} p_{is}y_{is}ds. \tag{2.11}$$

である。

集計的な中間財

最終財部門と中間財部門の企業の意志決定に基づいて，最終財の生産関数は次式で与えられる。

$$y_t = z_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} = z_t k_t^{\alpha}. \tag{2.12}$$

ただし，集計的な資本および労働投入量は次式で与えられる。

$$k_t = \int_{-\infty}^{t} k_{it}di. \tag{2.13}$$

$$l_t = \int_{-\infty}^{t} l_{it}di = 1. \tag{2.14}$$

さらに，総要素生産性の集計された水準は，CES 型の集計的な中間財の生産性の水準によって与えられる：

$$z_t = \left(\int_{-\infty}^{t} a_{it}^{\frac{\theta}{1-\theta}} di\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}. \tag{2.15}$$

上式は利用可能なすべての中間財の生産性水準のべき平均であるので，z_t を平均生産性と呼ばれている。

i 番目の企業の集計的な産出量のシェアは次式で与えられる。

$$\frac{y_{it}}{y_t} = \left(\frac{a_{it}}{z_t}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \tag{2.16}$$

$$\frac{k_{it}}{k_t} = \frac{l_{it}}{l_t} = \left(\frac{a_{it}}{z_t}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}, \tag{2.17}$$

$$\frac{p_{it}}{p_t} = p_{it} = \frac{z_t}{a_{it}}. \tag{2.18}$$

集計的な要素需要は，次式の形で，個々の企業の要素需要に対して最適条件を満足することがわかる。

$$w_t = \theta(1-\alpha)\frac{y_t}{l_t}di, \tag{2.19}$$

$$r_t + \delta = \theta\alpha\frac{y_t}{k_t}. \tag{2.20}$$

この集計的な生産関数を用いれば，企業価値を次式の形で書き直すことができる。

$$V_{it} = (1-\theta)\int_t^{\infty} c^{-\int_t^s r_j dj}\left(\frac{a_{is}}{z_s}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} y_s ds. \tag{2.21}$$

この式は，企業の生産性水準 a_{it} の経路，集計的な生産性 z_t，実質利子率 r_t，および産出量 y_t に依存している。

技術の履行

生産を開始する前に，企業は中間財を生産するために使用する技術をどの生産性水準で履行するかを決定する。その後，企業はより効率的に中間財を生産することを学び，生産性水準 a_{it} が中間財 i の潜在的生産性水準（$\bar{a}_i$）に到達するまで，生産性水準は増加する。

Comin and Hobijn（2007）と同様に，学習は外生的に生じるものとする。ここで，中間財 i の履行水準を次式のように定義する。

$$x_{it} = \left(\frac{a_{it}}{\bar{a}_i}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}, \tag{2.22}$$

ただし $x_{it} \in$ [0,1] である。学習によって x_{it} が次式にしたがって進展することを仮定する。

$$\begin{aligned}\dot{x}_{it} &= \lambda\frac{\theta}{1-\theta}(x_{it} - x_{it}^{\frac{1}{\theta}}) \\ &= \lambda\frac{\theta}{1-\theta}x_{it}(1 - x_{it}^{\frac{1-\theta}{\theta}}).\end{aligned} \tag{2.23}$$

ただし，λ は学習に関するパラメータで，この学習パターンは次式を意味している [1]。

---

[1] この関数は sigmoidal funtion と呼ばれるものである。（2.23）の導出は（2.22）と（2.24）をそれぞれ時間で微分し，その結果と（2.24）を $e^{-\lambda(s-t-c)}$ について解いたものを利用すれば得られる。

$$a_{is}=\frac{\bar{a}_i}{1+e^{-\lambda(s-t-c)}},\quad s>t \tag{2.24}$$

ただし，c は x_{it} が 1 に近づく際の経路の曲率が変化する時期である[2]。

上記の生産性の経路を所与として，企業の現在価値は現行の生産性の水準と集計的な生産性の経路，実質利子率と生産量の関数として，次式で表わされる。

$$\begin{aligned} V_{it} &= (1-\theta)\int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r_j dj}\left(\frac{\bar{a}_i}{1+e^{-\lambda(s-t-c)}}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\left(\frac{1}{z_s}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} y_s ds \\ &= (1-\theta)\bar{a}_i^{\frac{\theta}{1-\theta}}\int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r_j dj} x_{it}\left(\frac{1}{z_s}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} y_s ds \end{aligned} \tag{2.25}$$

企業は学習曲線のどの地点から始めるべきかを決定する。履行水準のその後の経路は外生的な学習プロセスによって決定される。ここで，新規の中間財はそれらが発明された瞬間で採用されるものと仮定する。つまり，各時点で，中間財 t を独占的に供給する権利を持つ企業は，初期の履行水準，x_{tt} を決定しなければならない。図 1 に中間財 i，水準 x_{ii} での時刻 i の履行の生産性（a_i）の経路が示されて，その後外生的な率で $\bar{a}_i$ に収束している。

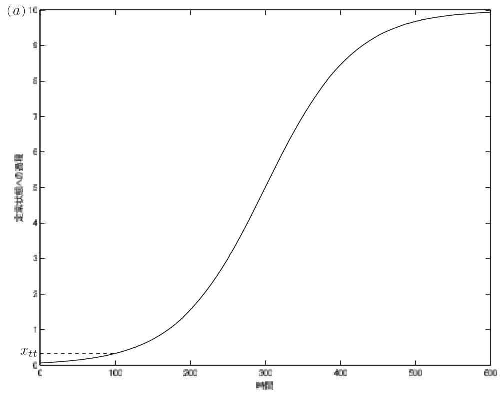

図 1　履行曲線

つぎに，時刻 t での中間財 t の履行に要する費用は次式の形をとるものとする。

$$C_t^{implement}(x_{tt})=(1-\theta)\xi z^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\bar{a}_t}{z_t}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}[-\ln(1-x_{tt})-x_{tt}]. \tag{2.26}$$

ここで，$\xi>0$ は履行に要する費用に関するパラメータで，x_{tt} は初期の履行水準である。また，$z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ は均斉成長を保証するスケール因子で，$\left(\frac{\bar{a}_t}{z_t}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ は，経済における平均的な生産性の水準

---

[2] c は定数であるため，以下のモデルでは実質的に t の中に包含されたものとして展開されるため，以後，モデルにおいて，c は表面上現れないことになる。

z_t から乖離する潜在的な生産性の水準 $\bar{a}_t$ の技術を遂行するためにかなりの費用がかかることを示す因子である。

最適な履行水準 x_{tt} は企業価値と履行費用の差，$V_{tt}(x_{tt}) - c_t^{implement}(x_{tt})$，を最大にするものである。このときの最適な履行水準は次式で与えられる。

$$x_{tt} = \frac{b_t y_t}{\xi z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b_t y_t}, \tag{2.27}$$

$$b_t = \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r_j dj} \left(\frac{z_t}{z_s}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \frac{y_s}{y_t} ds. \tag{2.28}$$

以上より，企業価値 V_t は次式で与えられる。

$$V_t = (1-\theta) z^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\bar{a}_t}{z_t}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \left(\frac{y_t b_t}{z^{\frac{1}{1-\alpha}}} - \xi \ln\left(1 + \frac{y_t}{z^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{b_t}{\xi}\right)\right). \tag{2.29}$$

2. 4　R&D 部門

1 つの特許は，瞬時に最も高い潜在的な生産性を用いて中間財を開発する発明者に報酬をもたらす。ここで，g_t を $t-1$ 期と t 期の間に開発された中間財間での潜在的な生産性の成長率とするものとし，次式を設定する。

$$\frac{\dot{\bar{a}}_t}{\bar{a}_t} = g_t. \tag{2.30}$$

R&D（研究開発）の集約度は g_t を決定する。特に，技術的なフロンティアの成長を表わす潜在的な生産性に付随する中間財を発明する費用は次式に等しいものとする。

$$C_t^{R\&D}(g_t) = \begin{cases} 0 & for \quad g_t < 0, \\ (1-\theta)\phi z_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\bar{a}_t}{z_t}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} g_t & for \quad g_t \geq 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

ただし，$\phi > 0$ は *R&D* 費用のパラメータである。発明者間の *R&D* の特許競争は中間財の価値と *R&D* 費用が等しくなるまで潜在的な生産性の成長率をもたらす。つまり次式が成立する。

$$V_t = C_t^{R\&D}(g_t). \tag{2.32}$$

よって，次式が得られる。

$$g_t = \frac{1}{\phi}\left(\frac{y_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} b_t - \xi \ln\left(1 + \frac{y_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{b_t}{\xi}\right)\right). \tag{2.33}$$

3　均衡

経済の均衡経路にとって決定的なものは， 3 つの生産性に関わる測度である。第 1 番目のものは，誘引された最も新しい中間財の潜在的な生産性の水準 $\bar{a}_t$ である。第 2 番目のものは，すべての現在入手可能な中間財の技術を操作できる平均的な潜在的生産性で，次式に等しい。

$$\bar{z}_t = \left(\int_{-\infty}^{t} \bar{a}_i^{\frac{\theta}{1-\theta}} di \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}. \tag{3.34}$$

第 3 番目のものは，平均的な生産性水準 z_t である。平均的な生産性と平均的な潜在的生産性は中間財間に亘る実際の生産性と潜在的な生産性を集計したものである。

定義：**この経済の均衡は以下に述べる 12 個の方程式を満足する次の変数である。**

$$\{y_t, c_t, i_t, k_t, x_{tt}, b_t, g_t, z_t, \bar{z}_t, \bar{a}_t, x_{it}\} \tag{3.35}$$

以上の結果より，一般均衡システムは以下の式でまとめることができる。

(1)　資源制約式

$$y_t = c_t + i_t + (1-\theta) z_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\bar{a}_t}{z_t} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} (\xi(-\ln(1-x_{tt}) - x_{tt}) + \phi g_t). \tag{3.36}$$

(2)　オイラー方程式

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \sigma(r_t - \rho). \tag{3.37}$$

(3)　集計的な生産関数

$$y_t = z_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} = z_t k_t^{\alpha}. \tag{3.38}$$

(4)　資本の蓄積方程式

$$\dot{k}_t = i_t - \delta k_t. \tag{3.39}$$

(5)　最適な履行水準 x_{tt}

$$x_{tt} = \frac{b_t y_t}{\xi z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b_t y_t}. \tag{3.40}$$

(6)　成長率 g_t を決定する均衡 *R&D* 条件

$$g_t = \frac{1}{\phi} \left(\frac{y_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} b_t - \xi \ln \left(1 + \frac{y_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{b_t}{\xi} \right) \right). \tag{3.41}$$

(7)　現在割引率係数

$$b_t = \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r_j dj} \left(\frac{z_t}{z_s} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \frac{y_s}{y_t} ds. \tag{3.42}$$

(8)　$\bar{a}_t$ の動き

$$\frac{\dot{\bar{a}}_t}{\bar{a}_t} = g_t. \tag{3.43}$$

(9)　平均的な潜在生産性の動き

$$\left(\dot{\bar{z}_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}} \right) = \bar{a}_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}. \tag{3.44}$$

(10)　平均的な生産性の動き

$$\begin{aligned}\left(\dot{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}}\right) &= \lambda\frac{\theta}{1-\theta}\int_{-\infty}^{t}\bar{a}_i^{\frac{\theta}{1-\theta}}(x_{vt}-x_{vt}^{\frac{1}{\theta}})dv+\bar{a}_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}x_{tt} \\ &= \lambda\frac{\theta}{1-\theta}\left(z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}-\bar{x}_t\right)+\bar{a}_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}x_{tt}, \qquad (3.45)\end{aligned}$$

(11)　生産性の程度

$$\bar{x}_t = \int_{-\infty}^{t}\bar{a}_i^{\frac{\theta}{1-\theta}}x_{it}^{\frac{1}{\theta}}di, \qquad (3.46)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{it} &= \lambda\frac{\theta}{1-\theta}(x_{it}-x_{it}^{\frac{1}{\theta}}) \\ &= \lambda\frac{\theta}{1-\theta}x_{it}(1-x_{it}^{\frac{1-\theta}{\theta}}) \qquad (3.47)\end{aligned}$$

である[3]。ただし，i_t は t 期の投資である。この場合，上記システムの初期値は，k_0，$\bar{a}_0$，z_0，および x_{ii} で，これらの初期値が与えられると，上記システムは閉じることが確認される[4]。

c_t，y_t，k_t，および i_t は均衡経路上では定常ではないので，以下では定常状態の変数に改めて議論を進める。このため，Comin and Hojijn（2007）と同様に，平均的生産性のトレンド $z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}$ で上記の変数を徐することによって定常状態の変数へと変換する[5]：

$$c_t^* = \frac{c_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad y_t^* = \frac{y_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad k_t^* = \frac{k_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad i_t^* = \frac{i_t}{z_t^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \qquad (3.48)$$

また，（2.28）の現在割引係数を次式のように定義する。

$$b_t^* = b_t = \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r_j dj}\left(\frac{z_t}{z_s}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\frac{y_s}{y_t}ds. \qquad (3.49)$$

さらに，均衡経路の定常的な表現を行うために，3 つの生産性の測度，$\bar{a}_t$，$\bar{z}_t$，z_t，のトレンドを除去する。よって，以下のような 2 つのトレンドを持たない生産性の測度を導入する。

$$\bar{\chi}_t = \left(\frac{\bar{a}_t}{\bar{z}_t}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}, \quad \chi_t = \left(\frac{\bar{z}_t}{z_t}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}. \qquad (3.50)$$

Comin and Hobijn（2007）では，$\bar{\chi}_t$ は潜在的な生産性ギャップ，χ_t は履行ギャップと呼ばれている。

以上より，変換された変数を用いれば，このシステムは次式で表わされ，Comin and Hobijn（2007）と異なり，$\bar{a}_t$，$z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ および x_{it} も含まれることになる。しかしながら，次の 3.1 で述べる定常状態において，これらの 3 つの変数は除外することができる。

$$y_t^* = c_t^* + i_t^* + (1-\theta)\chi\bar{\chi}(\xi(-\ln(1-x_{tt})-x_{tt})+\phi g_t), \qquad (3.51)$$

---

3 （3.45）は，ライプニッツのルールを利用して（2.15）を時間で微分し，その結果に（2.23）と（2.22）の変形したものを代入すれば得られる。
4 （3.37）の r_t は（2.20）から得られる。
5 定常状態を定義するためにはこの変換が必要で，これはある程度厳しい制約である。

$$\frac{\dot{c^*}_t}{c_t^*} = \sigma(\alpha\theta\frac{y_t^*}{k_t^*} + \delta - \rho) - \frac{\alpha}{1-\alpha}g_t, \tag{3.52}$$

$$y_t^* = (k_t^*)^\alpha, \tag{3.53}$$

$$\frac{\dot{k}_t^*}{k_t^*} = \frac{i_t^*}{k_t^*} - \delta - \frac{1}{1-\alpha}g_t, \tag{3.54}$$

$$x_{tt} = \frac{b_t^* y_t^*}{\xi + b_t^* y_t^*}, \tag{3.55}$$

$$g_t = \frac{\dot{\bar{a}}_t}{\bar{a}_t} = \frac{1}{\phi}\left(b_t^* y_t^* - \xi \ln\left(1 + \frac{b_t^* y_t^*}{\xi}\right)\right), \tag{3.56}$$

$$\dot{b_t^*} = \left(\alpha\theta\frac{y_t^*}{k_t^*} - \delta + \lambda\frac{\theta}{1-\theta}\frac{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}} - \bar{x}_t}{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}} + \bar{\chi}_t\chi_t x_{tt} - \frac{\dot{y_t^*}}{y_t^*} - \frac{1}{1-\alpha}g_t\right)b_t^* - 1, \tag{3.57}$$

$$\frac{\dot{\chi}_t}{\chi_t} = \bar{\chi}_t - \lambda\frac{\theta}{1-\theta}\frac{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}} - \bar{x}_t}{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}} - \bar{\chi}_t\chi_t x_{tt}, \tag{3.58}$$

$$\frac{\dot{\bar{\chi}}_t}{\bar{\chi}_t} = \frac{\theta}{1-\theta}g_t - \tilde{\chi}_t, \tag{3.59}$$

$$\bar{x}_t = \int_{-\infty}^t \bar{a}_i^{\frac{\theta}{1-\theta}} x_{it}^{\frac{1}{\theta}} di, \tag{3.60}$$

$$\dot{x}_{it} = \lambda\frac{\theta}{1-\theta}(x_{it} - x_{it}^{\frac{1}{\theta}}), \tag{3.61}$$

$$\frac{\dot{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}}}{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}} = \lambda\frac{\theta}{1-\theta}\frac{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}} - \bar{x}_t}{z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}} + \bar{\chi}_t\chi_t x_{tt}. \tag{3.62}$$

3. 1　定常状態

この経済の定常状態は9個の変換された変数が一定で，かつその他の経済変数の成長率が一定であるような均衡経路である。ここで，9個の定常状態の変数を（3.48）をもとにして，以下のように定義する。

$$\{\ \tilde{y^*},\ \ \tilde{c^*},\ \ \tilde{i^*},\ \ \tilde{k^*},\ \ \tilde{x},\ \ \tilde{b^*},\ \ \tilde{g},\ \ \tilde{\chi},\ \ \tilde{\bar{\chi}},\ \} \tag{3.63}$$

定常状態の各変数の値は次式で表わされる。これらの値は，（3.48），（3.51）～（3.62）を用いれば得られる。

$$\tilde{\bar{\chi}} = \frac{\theta}{1-\theta}\tilde{g}_t, \tag{3.64}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{\tilde{x}}, \tag{3.65}$$

$$\tilde{b^*} = \frac{1}{\rho + \psi\tilde{g}}, \tag{3.66}$$

$$\tilde{k^*} = \left(\frac{\alpha\theta}{\rho + \delta + \frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{3.67}$$

$$\tilde{y^*} = \left(\frac{\alpha\theta}{\rho + \delta + \frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \tag{3.68}$$

$$\tilde{i^*} = \left(\delta + \frac{1}{1-\alpha}\tilde{g}\right)\tilde{k^*}, \tag{3.69}$$

$$\tilde{x} = \frac{(\alpha\theta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\xi(\rho+\psi\tilde{g})\left(\rho + \delta + \frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (\alpha\theta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}, \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{\rho+\psi\tilde{g}}\left(\frac{\alpha\theta}{\rho + \delta + \frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right. \\ &- \left.\xi \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\frac{1}{\rho+\psi\tilde{g}}\left(\frac{\alpha\theta}{\rho + \delta + \frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.71}$$

ただし，

$$\psi = \lambda\frac{\theta}{1-\theta} + \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\frac{1}{1-\alpha} \tag{3.72}$$

である。ここで，(3.60) に対応する $\tilde{\tilde{x}}$ は，図 1 ，(2.15)，(2.22)，(3.46) および (3.47) により，$t\to\infty$ のとき，$\bar{x}_t \to \tilde{z}^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ となり，同様に，$z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ も，$\tilde{z}^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ に収束する。このことより，定常状態の値に関しては，$\bar{a}_t$，$\bar{x}_t$，およびと $z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ を除外することになる。そして，定常状態における平均的な生産性に関する成長率 $z_t^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ は次式のように一定の率で成長する。

$$\frac{\dot{\tilde{z}}^{\frac{\theta}{1-\theta}}}{\tilde{z}^{\frac{\theta}{1-\theta}}} = \tilde{\tilde{\chi}}_t\tilde{\chi}_t\tilde{x} \tag{3.73}$$

上記の (3.70) と (3.71) から，Comin and Hobijn (2007) の Fig2 と同様に，$\tilde{g}$ と $\tilde{x}$ がマイナスの関係 $\left(\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}} < 0\right)$ であることがわかる。この関係は後ほど計算で示される。そして，生産性の成長率 $\tilde{g}$ に関して以下のことが確認できる。

命題1：以下の式が成立するとき定常状態は一意に存在する。

$$\psi = \lambda\frac{\theta}{1-\theta} + \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\frac{1}{1-\alpha} > 0. \tag{3.74}$$

いま，(3.71) の左辺を $\tilde{g}$ で微分すれば1であり，右辺を $F(\cdot)$ として，$\tilde{g}$ で微分すれば，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\cdot)}{\partial \tilde{g}} &= -\frac{\psi}{\phi}\left((\tilde{b^*})^2\tilde{y^*} - \frac{1}{1+\frac{\tilde{b^*}\tilde{y^*}}{\xi}}(\tilde{b^*})^2\tilde{y^*}\right) \\ &- \frac{1}{\phi}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2\sigma}\frac{1}{\rho+\delta+\frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\left(\tilde{b^*}\tilde{y^*} - \frac{\tilde{b^*}\tilde{y^*}}{1+\frac{\tilde{b^*}\tilde{y^*}}{\xi}}\right) < 0\end{aligned} \tag{3.75}$$

となり，マイナスになることがわかる。また，$\tilde{g} = 0$ のとき右辺はプラスである。この関係が図2で示されている。

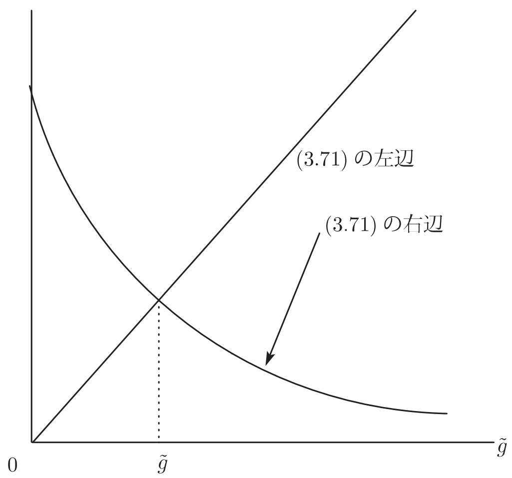

図2　定常状態の存在

よって，上の図2より，定常状態の生産性の成長率が一意に存在することがわかる。

比較静学

以下では，(3.71) で得られた定常状態での潜在的な生産性の成長率に関して比較静学を行う。そのためには，(3.71) を以下のように陰関数にして，その関数を $G(\cdot)$ とする。

$$\begin{aligned}G(\cdot) &= \phi\tilde{g} - \left(\frac{1}{\rho+\psi\tilde{g}}\left(\frac{\alpha\theta}{\rho+\delta+\frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &- \xi\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\frac{1}{\rho+\psi\tilde{g}}\left(\frac{\alpha\theta}{\rho+\delta+\frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right).\end{aligned} \tag{3.76}$$

そして，(3.66)，(3.68)，および (3.70) を利用すれば，次式が得られる。

$$\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{g}} = \phi + \psi \tilde{x^*}\tilde{b^*}^2\tilde{y^*} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2\sigma}\frac{\tilde{x^*}\tilde{b^*}\tilde{y^*}}{\rho+\delta+\frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}} > 0, \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{\lambda}} = \frac{\theta \tilde{g}\tilde{y^*}}{(1-\theta)(\rho+\psi\tilde{g})^2}\left(1-\frac{1}{1+\frac{\tilde{y^*}\tilde{b^*}}{\xi}}\right) > 0 \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{\xi}} = -\ln(1-\tilde{x}) - \tilde{x} > 0, \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{\phi}} = \tilde{g} > 0. \tag{3.80}$$

以上の結果より次式が成立する。

$$\frac{d\tilde{g}}{d\lambda} = -\frac{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{\lambda}}}{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{g}}} < 0, \tag{3.81}$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\xi} = -\frac{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{\xi}}}{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{g}}} < 0, \tag{3.82}$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\phi} = -\frac{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{\phi}}}{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{g}}} < 0. \tag{3.83}$$

命題 2 ：潜在的な生産性の成長率 $\tilde{g}$ は，履行水準のパラメータ λ，履行費用のパラメータ ξ，および研究開発費用のパラメータ ϕ が大きくなれば，低下する。

履行費用および研究開発費用のパラメータ（ξ，ϕ）が大きくなれば，それらの費用が高くなり潜在的な生産性の成長率が低下し，この結果は Comin and Hobijn（2007）と同じ結果である。

つぎに，(3.81）の結果は，図 3 に示すように，λ が大きくなれば，初期の履行水準は低くなるが，しだいに学習スピードは早くなり，その後，潜在的な生産性の成長率が低下することを示している。採用される初期の履行水準が低くその後収束スピードが早くなるような履行プロフィールであっても，潜在的な生産性の成長率が低下し，最終的には 1 人あたりの所得も低下することになる。

ここで，中間財の履行水準 $\tilde{x}$ に関する比較静学を行うと，以下の結果が得られる。

$$\frac{d\tilde{x}}{d\lambda} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{g}}\frac{d\tilde{g}}{d\lambda} \gtreqless 0 \tag{3.84}$$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\phi} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{g}}\frac{d\tilde{g}}{d\phi} > 0, \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{d\xi} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{g}}\frac{d\tilde{g}}{d\xi} \\ &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{g}}\frac{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \xi}}{\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \tilde{g}}} > 0.\end{aligned} \tag{3.86}$$

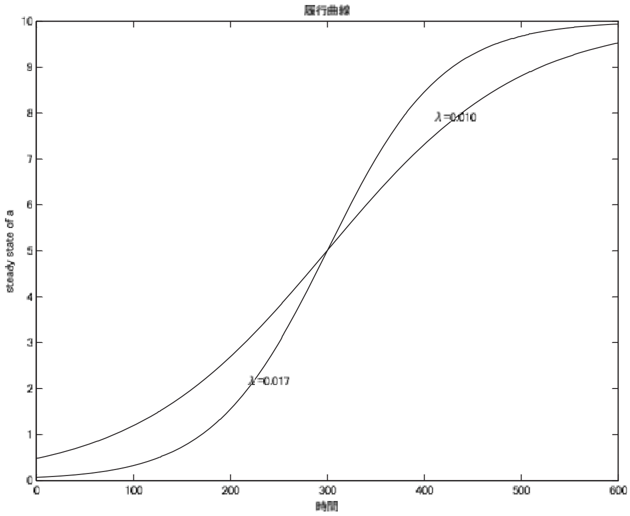

図 3　λの変化による履行曲線

上記の結果に関して，(3.84) の符号は一概に確定できない。そのために，以下では，符号を確定するための条件を求めることにする。いま，次式が成立している。

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \lambda} = -\frac{\theta}{1-\theta}\tilde{x}\tilde{b^*}\tilde{g}(1-\tilde{x}) < 0, \tag{3.87}$$

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial g} = -\tilde{x}(1-\tilde{x})\left(\psi\tilde{b^*} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2\sigma}\frac{1}{\rho+\delta\frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right) < 0, \tag{3.88}$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{\lambda}} = -\frac{\theta}{1-\theta}\frac{\tilde{y^*}\tilde{g}}{(\rho+\psi\tilde{g})^2}\frac{1-\frac{1}{1+\frac{\tilde{b^*}\tilde{y^*}}{\xi}}}{\phi+\left(\psi\tilde{b^*}+\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2\sigma}\frac{1}{\rho+\delta+\frac{\tilde{g}}{(1-\alpha)\sigma}}\right)\tilde{x}\tilde{b^*}\tilde{y^*}} < 0. \tag{3.89}$$

よって，次式が成立する。

$$-\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\lambda} \gtreqless \frac{\partial\tilde{x}}{\partial g}\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{\lambda}} \iff \frac{d\tilde{x}}{d\lambda} \gtreqless 0 \tag{3.90}$$

上記の関係は，多くのパラメータが関係しており，一概にその大小関係を決めることができない。以上より，以下の命題が得られる。

命題 3：履行水準 $\tilde{x}$ は，履行費用のパラメータ ξ，および研究開発費用のパラメータ ϕ が大きくなれば，上昇する。しかしながら，履行水準のパラメータ λ 大きくなるとき，履行水準は，(3.90) を条件として，履行水準は上昇するし，低下もする。

Comin and Hobijn (2007) で述べられている生産性の成長と技術の初期履行水準の関係は，本稿の (3.70) と (3.71) に対応し，これらの式は彼らが導出した結果と基本的には同じであり，生産性の成長率が高くなれば，企業の初期履行水準は低くなることを意味し，これは，研究開発への投資が増加し，履行費用が低くなって生産性の成長率が高くなることを示している。

ここで，技術の履行水準の大きさを数値計算をもとに，本稿と Comin and Hobijn (2007) の

履行水準の大きさを比較すると[6]，本稿の定常状態での初期履行水準 $\tilde{x}$ は 0.107 で，Comin and Hobijn（2007）の初期履行水準 $\tilde{x}_c$ は 0.033 となり，本稿の学習プロフィールであれば，高めの初期履行水準が必要であるという結果が得られた。この初期履行水準と命題 2 の経済成長率 $\tilde{g}$ と収束スピード λ との関係に関して，Comin and Hobijn（2008）の結果を踏まえて，もう少し詳細に検討してみよう。

技術の履行水準曲線に関する Comin and Hobijn（2007）の曲線と本稿のそれは，一例として，図 4 のように描くことができる。図 4 から推察されるように，ほとんどの区間で，Comin and Hpbijn（2007）の履行曲線が本稿のものよりも上方に位置していることが確認できる。したがって，新技術の採用時点で，Comin and Hobijn（2007）では，より低い履行水準を選択し，その結果，収束スピードが上昇すれば，履行曲線がより急な傾きをもつことになり，結果的には生産性の成長率（結果的には経済成長率）が上昇することになる。これに対して，本稿の命題 2 での結果ではそのようなプラスの関係にならず，図 3 で示されるように，収束スピードが上昇する場合は，初期における履行曲線の位置が下方に移動し，その結果，初期履行水準が低下し，生産性の成長率（および経済成長率）も低下することになる。このことをある程度相殺するために，初期履行水準を高めにする必要があると考えられる。しかしながら，この結果は，履行水準曲線である Sigmoid 関数の設定にも依存していることも考えられるため，より詳細な検討が必要とされるであろう。

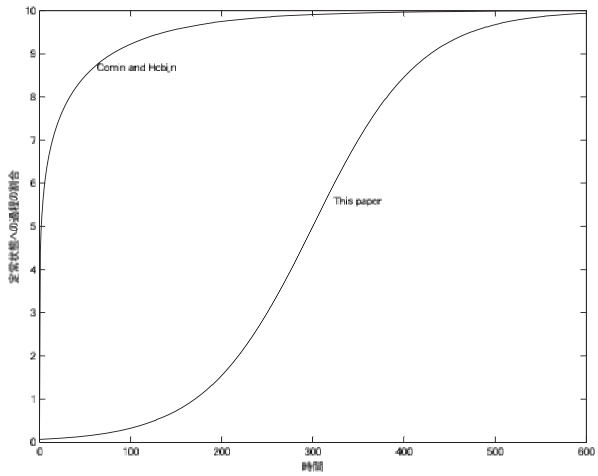

図 4　λ と技術の履行曲線との関係

4　おわりに

本稿は企業が新規の中間財を生産する際，研究開発部門で創出されたアイデア（生産を効率的に生産できる技術）を履行するために技術の初期履行水準を決定する Comin and Hobijn（2007）のモデルを基に，S 字型の技術の履行水準曲線（学習プロフィール）を導入して，生産性の成長

[6] 使用したパラメータの値は，Comin and Hobijn（2007）に倣って，$\rho = 0.050$，$\sigma = 1.000$，$\theta = 0.850$，$\alpha = 0.300$，$\lambda = 0.017$，$\xi = 216$，$\phi = 115$，$\delta = 0.050$ を使用し，$\tilde{g} = 0.020$ と設定した。

率，履行水準，および最終財（所得）に関する分析を行った。多くの点で Comin and Hobijn（2007）で得られた結果と同じ結果を得ることになったが，異なる結果として，生産性の履行水準に関する学習の効率性のスピードが上昇しても，生産性の成長率が低下するという，逆の結果が得られた。これは，スピードが急速に上昇するためにはある程度大きな履行費用がかかり，そのため，研究開発部門への資源投入が低下するためと考えられる。さらに，最適な技術の導入の初期履行水準は本稿で得られた水準が彼らが導出した水準よりも高いことが確認できたが，これは，本稿で設定した技術水準の履行曲線（Sigmoid 関数）にも依存するため，より詳細な検討が必要とされる。

今後の課題として，「はじめに」でも述べたように，本研究の最終的な目的は，技術の履行水準（または履行プロフィール）と所得との関係あるいは所得格差との関係を精確に分析することであるため，これらの関係を分析するための詳細な考察・検討が必要とされる。加えて，参照経済としての中央計画者による経済における分析を行い，ここで展開された分権経済において，最適な潜在的な生産性の成長率を実現できるような課税または補助金を導出することがあげられる。

参考文献

［1］Acemoglu D. and F. Zilibotti(2001) “Productivity Differences,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol.116, pp.562-606.

［2］Acemoglu, D and M. Dell(2009) “Productivity Differences Betwee and Within Countries,” *NEBR Working Paper No.15155*.

［3］Alvarez, F. E., F. Buera and R.R.Lucas Jr.(2008) “Models of Idea Flows,” *NEBR Working Paper No.14135*.

［4］Anderson, J.(2009) “Globalization and Income Distribution : A Specifc Factors Continuum Approach,” *NEBR Working Paper No.14643*.

［5］Caselli, F.(2005) “Accounting For Cross-Country Income Differences,” *Handbook of Economic Growth, Volume IA Edited by Phillippe Aghion and Steven N. Durlauf*, pp.679-741.

［6］Comin, D. and B. Hobijm(2007) “Implementing Technology,” *NBER Working Paper No.12886*.

［7］Eeckhout, J. and B. Jovanovic(2002) “Knowledge Spillovers and Inequality,” *American Economic Review*, Vol.92, pp.1290-1307.

［8］Lucas, R. E. J.(2008) “Ideas and Growth,” Working Paper No.14133, National Bureau of Economic Reserch.

［9］Pilat, D.(2004) “The ICT Productivity Paradox : Insights from Micro Data,” *OECD Economic Studies*, No.38.

［10］Pilat, D. and A. Wölfl.(2004) “ICT and Economic Growth -New Evidence from Inter-national Comparisons,” mimeo.

［11］片桐昭司（2008）「グローバル的経済環境変化における所得不平等の分析　－研究開発を伴う内生的成長モデルをもとに－」『応用経済学研究』第 1 巻，pp.119-137.